

## Irracionalitat

Hi havia una vegada un poble ocult entre les clarianes del bosc Tales i a pocs quilòmetres del riu Arquimedes. El poblet havia estat fundat per l'ordre pitagòrica per poder-hi allotjar una part dels nombres racionals. Des que els pitagòrics havien iniciat l'estudi dels nombres de manera formal, havien decidit anar fundant viles per tal de tenir organitzats tots els nombres racionals dels quals tenien coneixement. És clar, no era una tasca fàcil (no és trivial tenir organitzats infinits nombres), i els pitagòrics havien optat per una classificació senzilla dels poblats que havien anat fundant: el poble ocult entre les clarianes del bosc Tales i a pocs quilòmetres del riu Arquimedes en el qual transcorre la nostra història va rebre el nom de Pitàgores CDXI, i el lector ja pot imaginar que aquest poble es trobava entremig de les viles Pitàgores CDX i Pitàgores CDXII. L'objectiu de l'ordre pitagòrica era ben ambiciosa: tenir classificats i ordenats tots els nombres racionals. Cada poblat tenia assignat un membre de l'ordre que s'encarregava de passar llista dels nombres racionals cada dia i assegurar el bon funcionament de la vila. A vegades resultava una mica difícil tenir tots els nombres racionals controlats, i alguns pensaven que era molt divertit fer empipar el membre de l'ordre. El poble Pitàgores CDXI estava dirigit per Hipàs de Metapont, que resultava ser un matemàtic brillant i d'un gran carisme i valentia.

Amb els anys el poblat s'anava fent cada vegada més i més gran. Quan dos nombres decidien emprendre una vida junts i rebien el vist-i-plau del membre de l'ordre pitagòrica, ja estaven preparats per tenir descendència. A la nit de noces, el senyor es col·locava al numerador i la senyora es col·locava al denominador, es dividien i així generaven un nou nombre racional. Hipàs anava de bòlit registrant tots els nouvinguts al poblat. Moltes vegades havia d'atendre pares enfadats que li demanaven explicacions sobre per què el fill del senyor 24 i la senyora 12 era clavat al fill del senyor 100 i la senyora 50. "Tu seràs la 2.0 i tu la 2.00, i arreglat" remugava Hipàs com a resposta. La pobra senyora 0 havia estat oficialment declarada com a estèril, i Hipàs va prohibir el casament entre dos nombres 0 perquè una vegada que van tenir descendència no es va poder determinar quin nombre havien generat.

Resulta que tot i l'aparent tranquil·litat dels poblats pitagòrics hi havia nombres que vivien ocults pels boscos i es mantenien sempre allunyats dels racionals. Eren nombres salvatges, incapaços de viure en civilització perquè no podien actuar de forma racional. La seva existència era explicada com un conte per als més petits i en realitat no se sabia de cap nombre racional que hagués trobat de veritat un salvatge enmig del bosc. Però un dia que la jove 2.00 estava anant a buscar aigua per al dinar a una font es va equivocar de camí i va acabar sortint dels límits de Pitàgores CDXI. Espantada, va intentar tornar a refer el seu propi camí a corregudes, però de sobte un nombre immens i d'aspecte ferotge la va assaltar. Era un tipus de nombre que ella no havia vist mai: tenia l'aspecte d'un 2 al costat d'un altre 2 amb una mena barret amb cua a sobre. Es tractava del salvatge nombre  $2\sqrt{2}$ . El nombre va agafar la jove 2.00 de manera brutal i amb els ulls desorbitats la va obligar a dividir-lo. Ella va intentar forcejar però va ser incapaç de fugir de les seves grapes. Plorant desesperadament, va entreveure el naixement d'un

monstre:  $\sqrt{2}$ . El salvatge  $2\sqrt{2}$  va córrer altra vegada cap a dins del bosc mentre deixava anar uns sons grollers i intel·ligibles. La número 2.00 va restar una estona al terra mullat i humit de la clariana, sense veure's en cor de retornar al poble. Al seu costat el nouvingut  $\sqrt{2}$  reclamava l'atenció d'algun adult. Finalment la 2.00 va decidir que no podia deixar el petit  $\sqrt{2}$  a la intempèrie i el va agafar en braços per tornar a Pitàgores CDXI. Abans d'entrar al poble, va tapar-li la mena de barret que duia, curiosament, amb la seva capa; d'aquesta manera semblava un simple 2. Encara amb els ulls inflats de llàgrimes i tremolant de cap a peus, va entrar a casa seva i amb un fil de veu va explicar als seus pares 100 i 50 la situació. Al final van decidir que el petit  $\sqrt{2}$  duria sempre la capa per ocultar la seva arrel i així semblaria un nombre racional normal i corrent. Segur que ningú no ho notaria.

El que no s'esperaven és que el nombre  $\sqrt{2}$  mostraria un comportament tan diferent al dels altres nombres. La 2.00 i els seus pares estaven convençuts que  $\sqrt{2}$  era un nombre racional més, que simplement havia patit una malformació física. Però el seu caràcter no era propi d'un nombre racional. A mesura que creixia s'evidenciava més i més el seu caràcter somniador i impulsiu. Tots els nombres de Pitàgores CDXI actuaven de manera lògica i assenyada, pensant fredament com havien d'actuar i mostrant sempre el seu enteniment. El nombre  $\sqrt{2}$  era completament oposat: es deixava dominar per les passions i solia dur a terme accions absurdes i eixelebrades. Actuava sense pensar i es deixava guiar únicament pels instints. No donava mostres de reflexionar sobre el que feia, i ben aviat es va convertir en el nombre més arrauxat i inconscient del poble. La 2.00 estava desesperada; no hi havia manera de preveure el comportament de  $\sqrt{2}$ . Era un noi completament esbojarrat, i ella ja havia desistit d'intentar aconseguir que es comportés d'una manera lògica i raonable. Si un dia el convidaven a una festa d'aniversari, ell decidia de sobte començar a menjar-se els pastissos tot sol. Si un dia el portaven a visitar un llac, ell decidia llençar-s'hi d'una capbussada sense pensar en el refredat que hauria de suportar l'endemà. Si un dia passejaven pel carrer i olorava el seu plat preferit en una paradeta del mercat, se l'emportava sense dubtar-ho.  $\sqrt{2}$  vivia en el seu propi món, aliè a qualsevol manifestació lògica del poble.

S'ha de dir, de tota manera, que la manca de racionalitat no ha de ser sempre vista com un entrebanc. A vegades la raó i la reflexió constant ens impedeixen realitzar accions que impulsivament faríem sense dubtar. L'insensat  $\sqrt{2}$  va ajudar onze nombres a fugir de casa, vuit nombres a deixar el seu monòton ofici, i quinze més a declarar el seu amor. Tanmateix, ell va continuar creixent com el llunàtic de Pitàgores CDXI, encara que la capa li amagués la seva deformitat física.

Hipàs no va tardar a adonar-se que algun fet extraordinari estava succeint en el poblat. Al principi tots els nombres estaven exaltats per l'arribada d'aquell boig, i la seva inconsciència constituïa el principal tema de conversació. El primer dia que  $\sqrt{2}$  es va presentar públicament a la passada de llista diària (perquè la llei l'obligava a assistir-hi a partir d'una certa edat) tots els nombres van començar a murmurar al seu pas. La seva capa el feia inconfusible i mai no passava desapercebut. Tot i així, com que ell estava

absort en la seva pròpia bogeria, li relliscaven els comentaris aliens sobre ell. Mentre passaven llista, la 2.00 el va obligar a col·locar-se entremig de l'1.9999999 i el 2.00001 a la cua dels nombres ordenats, però ell no s'hi sentia a gust. "No he de ser aquí, jo. Em sento més a prop d'altres nombres. Deixa'm!" cridà enfadat, i va marxar corrents cap a l'1.4142 davant de la mirada atònita de la 2.00. I quan al poblat va néixer la 1.41421356 encara s'hi va sentir més a gust. La 2.00 no entenia res, però ja no feia l'esforç d'intentar entendre'l. I així, entre bogeria i bogeria, va anar passant el temps i  $\sqrt{2}$  seguia ocultant part de la seva aparença amb la capa que li tapava l'arrel.

Poc a poc els altres nombres van començar a descobrir que  $\sqrt{2}$  mostrava també certes capacitats excepcionals (a part de la seva folia). Un dia els seus companys estaven intentant solucionar l'equació  $x^2 + 2 = 0$ , però no els sortia de cap manera.  $\sqrt{2}$  s'ho va mirar, s'hi va acostar, i va afirmar que ell era solució de l'equació. Tots es van quedar ben parats. O un altre dia resulta que Hipàs estava intentant discernir amb un regle quant mesurava la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual mesuraven 1. Ho intentava i ho tornava a intentar, però no podia. "És clar que no pots mesurar-ho", va dir-li  $\sqrt{2}$  amb un to sarcàstic, que l'havia estat observant. "Perquè jo sóc la mesura d'aquest rectangle, i no m'aconseguiràs determinar amb un regle".

Va ser aleshores quan Hipàs va tenir clar que  $\sqrt{2}$  era molt més que un simple llunàtic. Una idea va començar a néixer a la seva ment, i com més observava l'insòlit nombre més es convencia del seu plantejament. I si... i si realment aquell nombre no tingués la més mínima raó? I si en realitat simplement no era racional? Aquella arrel que l'envoltava com l'àurea d'un sant semblava indicar molt més que una malformació física. Hipàs es va sobresaltar davant de la seva pròpia idea. No podia ser! No podia ser que aquell nombre estigués desafiant el sistema pitagòric. Hipàs no era ningú per posar en qüestió les matemàtiques desenvolupades pel gran Pitàgores. I tanmateix... i si no tots els nombres fossin racionals, tal i com havien cregut sempre (i així havien dissenyat el seu sistema de poblats pitagòrics)? I si els salvatges de la llegenda existissin realment, i  $\sqrt{2}$  en fos una mostra?

Obsessionat amb la seva idea, Hipàs es va tancar a casa seva i no en va sortir durant set dies i set nits. Durant aquell temps va estar exprimint al màxim les seves capacitats matemàtiques i va posar en pràctica tot el que havia après a l'escola pitagòrica. Tots els nombres del poble estaven molt sorpresos i neguitosos. No hi havia ni rastre de la màxima autoritat de Pitàgores CDXI, i s'hauria instaurat una anarquia si els nombres no haguessin estat tant racionals. Al setè dia Hipàs va sortir trontollant de dins de casa seva, amb el rostre amarat de suor, la roba arrugada i els ulls vermells brillants de l'excitació. Respirava angoixadament i duia a les mans tremoloses un plec de fulls que guardava com si fos un tresor. Va reunir tots els nombres a la plaça central del poble, es va aclarir la veu i va cridar  $\sqrt{2}$  amb angoixa i impaciència. El nombre foll va aparèixer entremig de la multitud sense fer gaire cas a la demanda d'Hipàs, perdut com sempre en la seva insensatesa, i va caminar fins el mig de la plaça. Aleshores Hipàs, amb una mirada esfereïdora (que fins i tot deixava entreveure una certa bogeria que era més

característica de  $\sqrt{2}$  que no pas dels éssers racionals) i amb una gran excitació, va arrencar la capa de  $\sqrt{2}$  d'una revolada i va deixar el nombre aturadit, ben bé com si l'hagués despullat, enmig de la plaça. Els nombres racionals es van quedar bocabadats. Què era aquella mena de barret amb cua que l'envoltava? Alguns van cridar de terror, d'altres de sorpresa, d'altres d'inquietud. Però cap nombre no va restar indiferent. Tanmateix, Hipàs encara no havia revelat totes les sorpreses. Amb un pas feixuc, es va apropar al nombre, el va observar detingudament, i va anunciar amb un to greu: "Aquest nombre no és com vosaltres. No és un nombre racional". La cridòria del poble va augmentar de volum. "Alguns podeu pensar que certament té un comportament diferent al vostre. Però jo..." i va dir això brandant els fulls que duia a la mà "...he demostrat matemàticament, sense cap mena de dubte, que  $\sqrt{2}$  és un nombre irracional". L'escàndol dels nombres va arribar al seu clímax. Aleshores era cert que existien els nombres irracionals? "Quines implicacions té aquesta descoberta?" va preguntar la jove 2.00, espantada per la resposta que podia rebre. "Inimaginables: s'acaba d'esquerdar per sempre el somni dels pitagòrics".

La notícia es va escampar com la pólvora i en poques hores ja havien arribat les novetats a Pitàgores CDIX, CDX, CDXII i CDXIII. En pocs dies ho coneixien tots els poblats en un radi de 20 quilòmetres, i en una setmana ja havia arribat a la seu central de l'escola pitagòrica, on residia Pitàgores. Hipàs va ser cridat immediatament per donar explicacions sobre la seva demostració que evidenciava un error de fonament en l'ensenyament pitagòric. Quan Hipàs va arribar a l'edifici central (que va trobar summament majestuós i esplèndid) va ser rebut pels més alts càrrecs pitagòrics, els quals el van conduir fins a la sala principal de l'edifici, on l'esperava Pitàgores. Tots l'observaven amb un rostre que denotava una gran serietat i preocupació. Però Hipàs no sentia el més mínim temor. Sabia que la seva obligació com a matemàtic era la de resoldre problemes i fer-ne difusió, i per tant ell havia complert amb els seus principis. Tanmateix, l'ordre pitagòrica no semblava compartir la seva visió. Pitàgores es va aixecar solemnement i va començar a parlar amb extrema rectitud:

- Ens hem reunit aquí, estimats companys pitagòrics, per valorar les conseqüències de l'insensat acte del mestre Hipàs de Metapont la darrera setmana. Primer de tot, mestre Hipàs, necessito comprovar que la seva demostració sigui certa. Deixi'm els fulls -va dir, allargant la mà cap a ell.

Hipàs els hi va donar. Pitàgores els va examinar en silenci, arrugant el front. El full deia: "Per demostrar que  $\sqrt{2}$  es irracional suposarem el contrari i demostrarem que és absurd. Si  $\sqrt{2}$  fos racional, per definició el podríem escriure com el quocient de dos enters positius coprimsers  $p$  i  $q$ , és a dir,  $\sqrt{2} = p/q$  on  $p/q$  és una fracció irreductible i per tant  $2q^2 = p^2$ . Això significa que  $p^2$  és un múltiple de 2, i per tant que  $p$  també és un múltiple de 2. Aleshores podem escriure  $p = 2k$  per a un cert valor de  $k$ , i en conseqüència  $2q^2 = (2k)^2$  i per tant  $q^2 = 2k^2$ . Això implica que  $q^2$  és un múltiple de 2, i que per tant  $q$  també és un múltiple de 2. Però aquí hem arribat a una contradicció, perquè hem obtingut que tant  $p$  com  $q$  són múltiples de 2, quan en un inici havíem suposat que eren coprimsers.

En conclusió,  $\sqrt{2}$  no pot ser racional". Pitàgores va acabar de llegir i va sospirar amb preocupació.

- La demostració és correcta. El mestre Hipàs té raó.

Una remor intranquil·la es va escampar per la sala. Tots els alts càrrecs pitagòrics van començar a parlar amb desesperació.

- És el fi de l'escola pitagòrica! -exclamà un d'ells amb els ulls plorosos.

- Anys i anys de feina que s'esvaeixen en un no-res... -es lamentà un altre.

- Com ens vam poder equivocar tan profundament? -es preguntà un darrer.

- Silenci! -va bramar Pitàgores-. Encara no hem acabat. El mestre Hipàs ha comès una gran imprudència. No només ha acabat amb tots els fonaments pitagòrics, sinó que el més greu és que ha fet públic el seu descobriment. No recorda una de les màximes de l'escola pitagòrica? No recorda que va jurar no revelar els secrets matemàtics que pogués descobrir?

- Sí -respongué Hipàs-. Però això s'havia de saber. Pretenien ocultar a tots els homes que no tots els nombres són racionals? Pretenien fer veure que no existeixen els nombres que no tenen un període en la seva expansió decimal? Pretenien deixar que el món visqués en la ignorància? No són, vostès, matemàtics? El coneixement ha de ser lliure, i no som ningú per ocultar una veritat matemàtica i guardar-la en un calaix. És aquesta la nostra tasca.

- No s'adona que ha ridiculitzat els pitagòrics públicament? No veu que ara ningú no ens respectarà? Hem comès un error massa fonamental. Hem perdut tota credibilitat -continuà Pitàgores-. Vostè ha actuat de forma completament insensata i imprudent! Vostè, com a home, hauria d'haver reflexionat sobre les conseqüències dels seus actes! Mestre Hipàs, vostè és un home, i és per tant un ésser racional. I no ha actuat com a tal!

- I qui ho diu, que els homes siguem completament racionals? -preguntà Hipàs-. Les nostres passions i els nostres instints són racionals? De veritat ho creuen?

Hipàs va fer una pausa i somrigué.

- No, senyors, els asseguro que vostès s'entesten en intentar racionalitzar un ésser que no ho és. No tot es guia per la lògica i la raó. Si sempre procuren explicar el món a partir de la raó, estaran limitant el propi món, perquè una gran part s'escaparà d'aquesta racionalitat. Vostès es creien que tots els nombres eren racionals, i s'han equivocat. No cometin el mateix error amb l'home. I fins i tot s'haurien d'impregnar d'aquesta irracionalitat, perquè a vegades la follia és precisament el que ens fa progressar. I potser sí que el meu acte pot ser considerat eixelabrat, inconscient i fins i tot il·lògic, però ho tornaria a fer els cops que fes falta per mostrar-los la part irracional de les matemàtiques, de l'home i del món que fins ara s'han negat a acceptar.

Es va fer un silenci a la sala. El rostre de Pitàgores s'havia anat enfosquint mentre Hipàs parlava.

- No! -va dir-. Mai no acceptaré la irracionalitat de l'home, si això és el que pretén. Vostè ha acabat amb el sistema de les matemàtiques perfectes que jo mateix vaig idear, i a més ho ha fet públic. Suposo que és conscient de quin és el càstig que aplica l'escola pitagòrica quan algun dels seus membres trenca el silenci i treu a la llum un descobriment matemàtic.

Hipàs va empassar saliva, però no va perdre ni un bri de valentia.

- Sí -va afirmar amb rotunditat.

Pitàgores li va clavar la mirada i va respondre:

- La seva execució tindrà lloc demà al primer raig de sol. Emporteu-vos-el -va dir, dirigint-se als guàrdies.

Tots els alts càrrecs pitagòrics es van mostrar horroritzats pel desenllaç de la història i per la falta de compassió de Pitàgores, però ningú no el va posar en qüestió. Ni tan sols el propi Hipàs.

Abans de sortir de la sala amb els guàrdies, Hipàs es va col·locar bé la túnica, va donar un últim cop d'ull a l'audiència i, dirigint-se a Pitàgores, va dir:

- Prefereixo morir sent coneixedor de la meva pròpia irracionalitat i de la d'infinits nombres que no pas viure esclau al servei de la raó.

Aquestes van ser les seves últimes paraules.